क्रियाकलाप 21

उद्देश्य

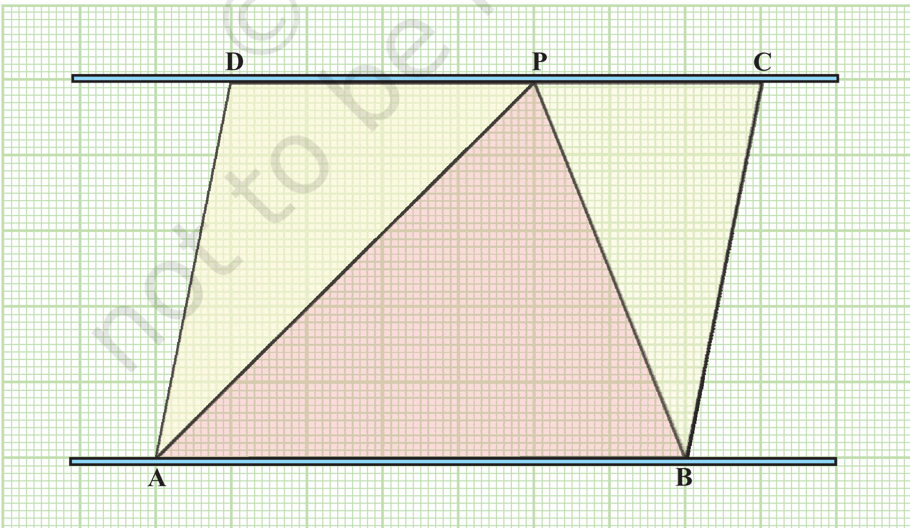
यह सत्यापित करना कि एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने एक समांतर चतुर्भुज और एक त्रिभुज के क्षेत्रफलों में 2 : 1 का अनुपात होता है।

आवश्यक सामग्री

सुविधाजनक माप की प्लाईवुड की एक शीट, आलेख काग़ज़, रंग का डिब्बा, लकड़ी की पट्टियों का एक युग्म, कैंची, कटर, गोंद, ज्यामिति बॉक्स।

रचना की विधि

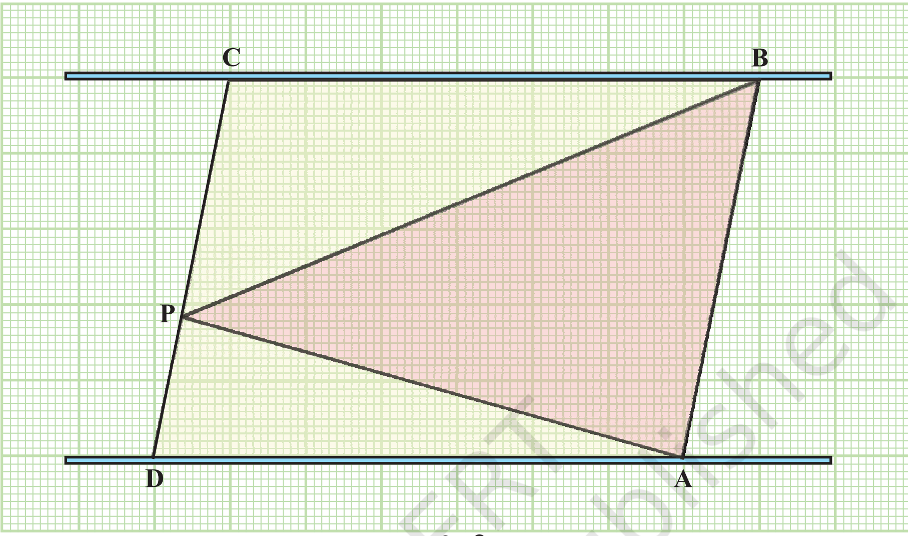
1. प्लाईवुड की एक आयताकार शीट लीजिए।
2. इस पर एक आलेख काग़ज़ चिपकाइए।
3. लकड़ी की पट्टियों (या स्केलों) का एक युग्म लीजिए तथा इन्हें क्षैतिजतः लगाइए ताकि ये परस्पर समांतर हों।
4. आधार पट्टी पर कोई दो बिंदु A और B निश्चित कीजिए तथा दूसरी पट्टी पर दो बिंदु C और D ऐसे लीजिए कि AB = CD हो।



आकृति 1

14/04/18

5. दूसरी पट्टी पर कोई बिंदु P लीजिए तथा इसे A और B से मिलाइए (देखिए आकृति 1)।



आकृति 2

प्रदर्शन

1. AB और CD परस्पर समांतर हैं तथा CD पर कोई बिंदु P स्थित है।
2. त्रिभुज PAB और समांतर चतुर्भुज ABCD एक ही आधार AB पर तथा एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हैं।
3. उपरोक्त त्रिभुज और समांतर चतुर्भुज में से प्रत्येक में अंतर्विष्ट वर्गों को गिनिए। इसके लिए, आधे वर्ग को $\frac{1}{2}$ वर्ग आधे से अधिक वाले वर्ग को 1 वर्ग लीजिए तथा आधे से कम वाले वर्गों को छोड़ दीजिए।
4. देखिए कि त्रिभुज PAB का क्षेत्रफल समांतर चतुर्भुज ABCD के क्षेत्रफल का आधा है।

प्रेक्षण

1. ΔPAB के अंदर वर्गों की संख्या = ...

2. समांतर चतुर्भुज ABCD के अंदर वर्गों की संख्या = ...

अत:, समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = 2 (त्रिभुज PAB का क्षेत्रफल)

इस प्रकार, समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल : त्रिभुज PAB का क्षेत्रफल = ... : ....

अनुप्रयोग

यह क्रियाकलाप किसी त्रिभुज के क्षेत्रफल के लिए सूत्र निगमित करने में सहायक रहता है तथा यह क्षेत्रमिति के कई प्रश्न हल करने में भी सहायक रहता है।

टिप्पणी

आप बिंदु P की विभिन्न स्थितियों के लिए विभिन्न त्रिभुज PAB ले सकते हैं तथा दोनों समांतर रेखाओ की भी विभिन्न स्थितियाँ ले सकते हैं, जैसा आकृति 2 में दर्शाया गया है।

क्रियाकलाप 22

उद्देश्य

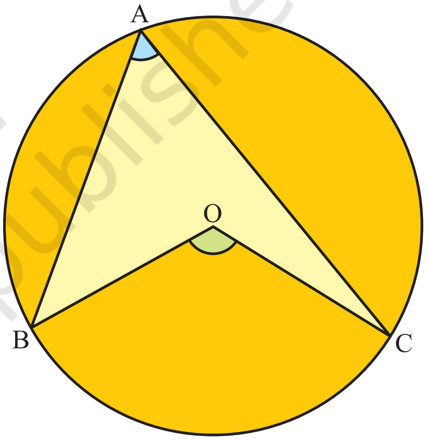
यह सत्यापित करना कि किसी वृत के एक चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण उसके द्वारा वृत के शेष भाग पर स्थित किसी बिंदु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।

आवश्यक सामग्री

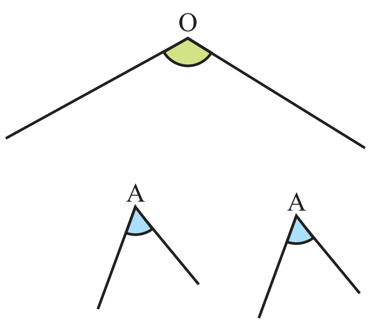
कार्ड बोर्ड, सफ़ेद काग़ज़, रंगीन ड्रॉइंग शीट, कैंची, स्कैच पेन, गोंद, ज्यामिति बॉक्स, पारदर्शक शीट।

रचना की विधि

1. एक सुविधाजनक माप का आयताकार कार्ड बोर्ड लीजिए और उस पर एक सफेद काग़ज़ चिपकाइए।
2. रंगीन ड्रॉइंग शीट से एक उपयुक्त त्रिज्या का वृत काट लीजिए तथा इसे कार्ड बोर्ड पर चिपका दीजिए।
3. चाप BC प्राप्त करने के लिए, इस वृत्त पर दो बिंदु B और C लीजिए (देखिए आकृति 1)।
4. बिंदुओं B और C को केंद्र से मिलाइए, ताकि चाप BC द्वारा केंद्र O पर अंतरित कोण प्राप्त हो जाए।
5. वृत्त के शेष भाग पर स्थित कोई बिंदु A लीजिए। इसे B और C से मिलाइए जिससे चाप BC द्वारा वृत्त के शेष भाग पर स्थित किसी बिंदु A पर अंतरित कोण BAC प्राप्त होता है (देखिए आकृति 1)।
6. पारदर्शक शीट का प्रयोग करते हुए, $\angle BOC$ का एक कटआउट बनाइए तथा $\angle BAC$ के दो कटआउट बनाइए (देखिए आकृति 2)।

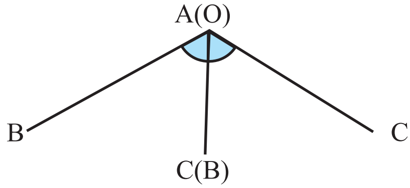


आकृति 1



आकृति 2

14/04/18



आकृति 3

प्रदर्शन

$\angle BAC$ के दोनों कटआउटों को कोण BOC के कटआउट पर इस प्रकार रखिए कि वे एक–दूसरे के आसन्न रहें, जैसा कि आकृति 3 में दर्शाया गया है। स्पष्टत:, $2 \angle BAC = \angle BOC$ है, अर्थात् वृत्त के किसी चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण उसके द्वारा वृत्त के शेष भाग पर स्थित किसी बिंदु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।

प्रेक्षण

$\angle BOC$ की माप = ...

$\angle BAC$ की माप = ...

अत:, $\angle BOC \ = 2 \times$ ....

अनुप्रयोग

यह गुण अन्य महत्वपूर्ण गुणों को सिद्ध करने में प्रयोग किया जाता है, जैसे एक ही वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं, चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण संपूरक होते है, इत्यादि।

क्रियाकलाप 23

उद्देश्य

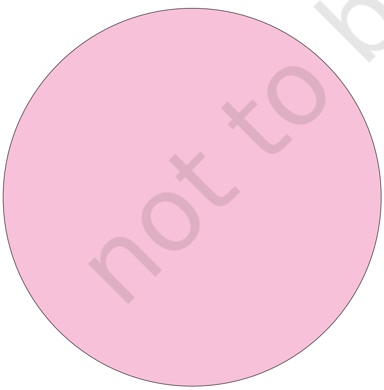
यह सत्यापित करना कि एक ही वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं।

आवश्यक सामग्री

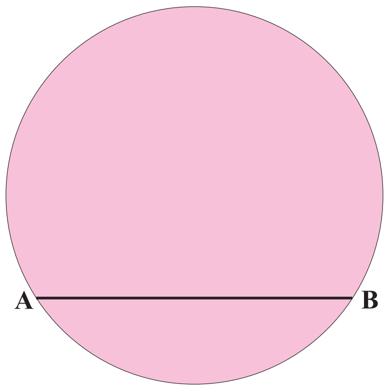
ज्यामिति बॉक्स, रंगीन चिकने काग़ज़, कैंची, कार्ड बोर्ड, सफ़ेद काग़ज़ और गोंद।

रचना की विधि

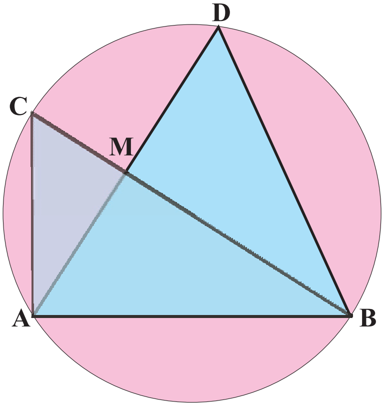
1. एक सुविधाजनक माप का कार्ड बोर्ड लीजिए और उस पर एक सफ़ेद काग़ज़ चिपकाइए।
2. चिकने काग़ज़ की एक शीट लीजिए और उस पर a इकाई त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए (देखिए आकृति 1)।
3. इस वृत्त का कटआउट बनाइए और इसे कार्ड बोर्ड पर चिपकाइए।
4. वृत्त पर स्थित कोई दो बिंदु A और B लीजिए तथा जीवा AB बनाने के लिए इन्हें मिलाइए (देखिए आकृति 2)।
5. अब वृत्त पर एक ही वृत्तखंड में दो बिंदु C और D लीजिए तथा AC, BC, AD और BD को मिलाइए (देखिए आकृति 3)।
6. कोणों ACB और ADB के कटआउट लीजिए।



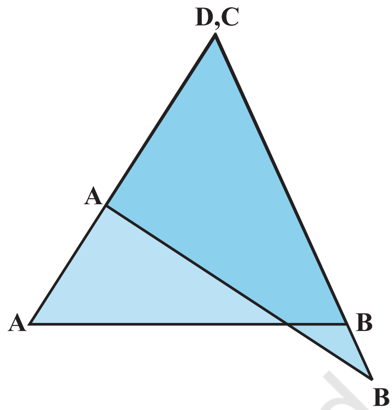
आकृति 1



आकृति 2



आकृति 3



आकृति 4

प्रदर्शन

$\angle ACB$ और $\angle ADB$ के कटआउटों को एक दूसरे के ऊपर इस प्रकार रखिए कि शीर्ष C शीर्ष D पर पड़े (देखिए आकृति 4)। आकृति 4 में, कोण ACB कोण ADB को पूर्णतया ढक लेता है। अत:, $\angle ACB = \angle ADB$ है।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

$\angle ACB$ = ______________, $\angle ADB$ = ______________

अत:, $\angle ACB$ .... $\angle ADB$ है। इस प्रकार, एक ही वृत्तखंड के कोण बराबर होते हैं।

अनुप्रयोग

इस परिणाम का प्रयोग ज्यामिति की वृत्त से संबंधित अन्य प्रमेयों/प्रश्नों को सिद्ध करने में किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 24

उद्देश्य

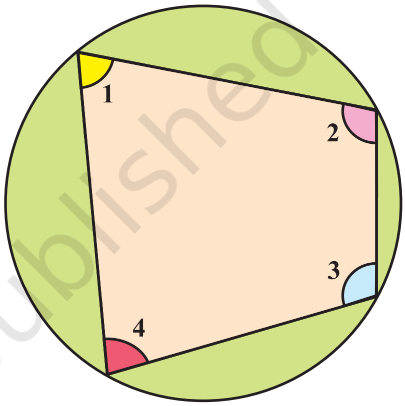
यह सत्यापित करना कि चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण संपूरक होते हैं।

आवश्यक सामग्री

चार्ट पेपर, ज्यामिति बॉक्स, स्कैच पेन, कैंची, गोंद, पारदर्शक शीट।

रचना की विधि

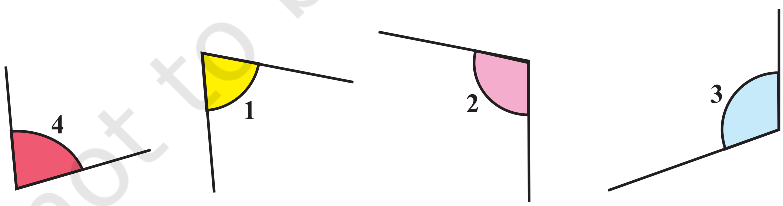
1. एक चार्ट पेपर लीजिए और उस पर एक सुविधाजनक त्रिज्या का वृत्त खींचिए।
2. इस वृत्त में, एक चतुर्भुज खींचिए ताकि चतुर्भुज के सभी शीर्ष वृत्त पर स्थित हों। आकृति 1 में दर्शाए अनुसार इन कोणों के नाम लिखिए तथा इनमें रंग भरिए।
3. इन कोणों के कटआउट बनाइए, जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।



आकृति 1

प्रदर्शन

सम्मुख कोणों $\angle 1$ और $\angle 3$ तथा $\angle 2$ और $\angle 4$ के कटआउटों को ऋजु कोण बनाने के लिए



आकृति 2

आकृति 3

14/04/18

चिपकाइए, जैसा कि आकृति 3 में दर्शाया गया है। इस प्रकार, $\angle 1 + \angle 3 = 180°$ और $\angle 2 + \angle 4 = 180°$ है।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

$\angle 1$ = ...; $\angle 2$ = ...; $\angle 3$ = ...; $\angle 4$ = ...

अतः, $\angle 1 + \angle 3$ = ...; $\angle 2 + \angle 4$ = ...

इसलिए, चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म का योग 180° है अर्थात् सम्मुख कोण .... होते हैं।

अनुप्रयोग

इस अवधारणा का प्रयोग ज्यामिति के विभिन्न प्रश्नों को हल करने में किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 25

उद्देश्य

प्रायोगिक रूप से एक समलंब के क्षेत्रफल के लिए सूत्र ज्ञात करना।

आवश्यक सामग्री

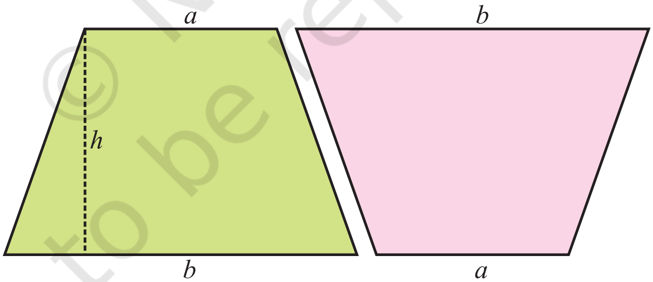
हार्ड बोर्ड, थर्मोकोल, रंगीन चिकने काग़ज़, गोंद, कैंची या कटर।

रचना की विधि

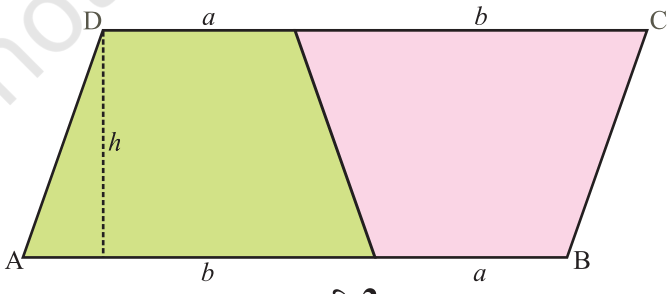
1. इस मॉडल के आधार के लिए, हार्ड बोर्ड का एक टुकड़ा लीजिए।
2. समांतर भुजाओं a और b इकाइयों वाले दो सर्वांगसम समलंब काट लीजिए (देखिए आकृति 1)।
3. इनको आकृति 2 में दर्शाए अनुसार हार्ड बोर्ड पर रखिए।

प्रदर्शन

1. दोनों समलंबों से बनी आकृति (देखिए आकृति 2) एक समांतर चतुर्भुज ABCD है।



आकृति 1



आकृति 2

2. इस समांतर चतुर्भुज की भुजा AB = $(a + b)$ इकाई है तथा इसका संगत शीर्षलंब = h इकाई है।

3. प्रत्येक समलंब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल) $= \frac{1}{2}(a+b)\times h$

अत: समलंब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(a+b)\times h$

$= \frac{1}{2}$ (समांतर भुजाओं का योग) $\times$ लांबिक दूरी

यहाँ, क्षेत्रफल वर्ग इकाई में हैं।

प्रेक्षण

समलंब की समांतर भुजाओं की लंबाइयाँ ______ और ______ हैं।

समांतर चतुर्भुज के शीर्षलंब की लंबाई = ________

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = ____________

समलंब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$(________ भुजाओं का योग) $\times$ ________

अनुप्रयोग

इस अवधारणा का प्रयोग निर्देशांक ज्यामिति में त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूत्र ज्ञात करने में किया जाता है। इसका प्रयोग ऐसे खेतों के क्षेत्रफलों को ज्ञात करने में भी किया जा सकता है जिन्हें विभिन्न समलंबों और समकोण त्रिभुजों में विभक्त किया जा सकता हो।

क्रियाकलाप 26

उद्देश्य

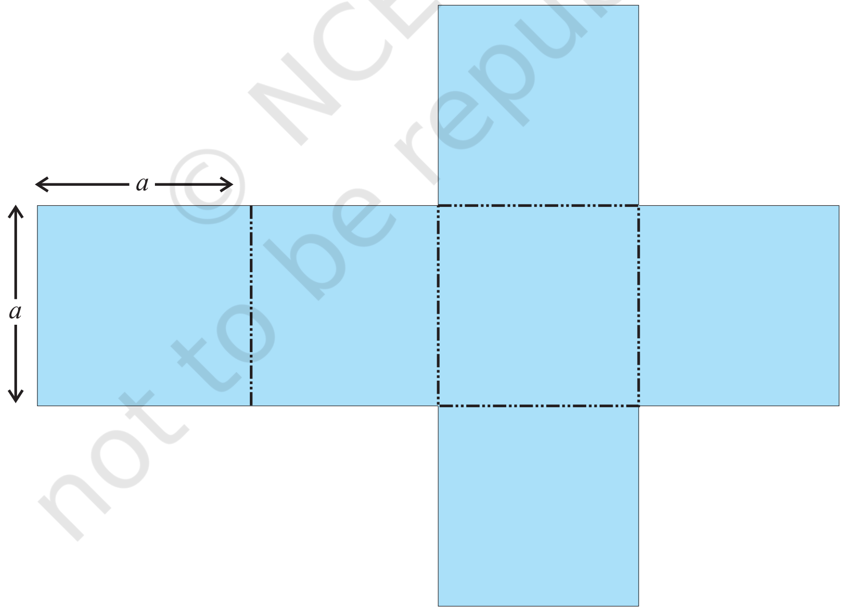
प्रायोगिक रूप से एक घन बनाना और उसके पृष्ठीय क्षेत्रफल के लिए सूत्र ज्ञात करना।

आवश्यक सामग्री

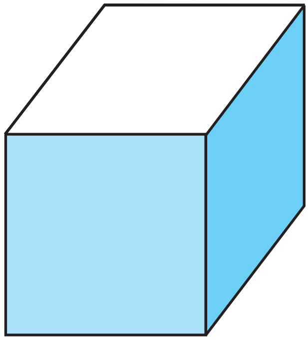
कार्ड बोर्ड, रूलर (पटरी), कटर, सेलोटेप, स्कैच पेन / पेंसिल।

रचना की विधि

1. कार्ड बोर्ड का प्रयोग करते हुए, भुजा a इकाई वाले 6 सर्वसम वर्ग बनाइए तथा उन्हें सेलोटेप की सहायता से आकृति 1 में दर्शाए अनुसार जोड़िए।
2. इन वर्गों को बिंदुंकित चिह्नों के अनुदिश मोड़िए ताकि एक घन प्राप्त हो जाए (देखिए आकृति 2)।



आकृति 1



आकृति 2

प्रदर्शन

1. प्राप्त घन का प्रत्येक फलक भुजा a इकाई का एक वर्ग है। अत:, घन के एक फलक का क्षेत्रफल a^2 वर्ग इकाई है।
2. इस प्रकार, भुजा a इकाई वाले घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल= $6a^2$ वर्ग इकाई है।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

भुजा की लंबाई a = ...

एक वर्ग / एक फलक का क्षेत्रफल= a^2 = ...

अत:, सभी वर्गों के क्षेत्रफलों का योग =.........+...........+.........+.........+.........+...........

इसलिए, घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$

अनुप्रयोग

यह परिणाम पैकिंग के लिए घनाकार बक्सों को बनाने के लिए आवश्यक सामग्री का आकलन करने में प्रयोग किया जा सकता है।

टिप्पणी

6 वर्ग पृथक-पृथक रूप से बनाने के स्थान पर (जैसा कि क्रियाकलाप में किया गया है), कार्ड बोर्ड पर ही सीधा घन का एक जाल बनाया जा सकता है।

क्रियाकलाप 27

उद्देश्य

प्रायोगिक रूप से एक घनाभ बनाना तथा इसके पृष्ठीय क्षेत्रफल के लिए सूत्र ज्ञात करना।

आवश्यक सामग्री

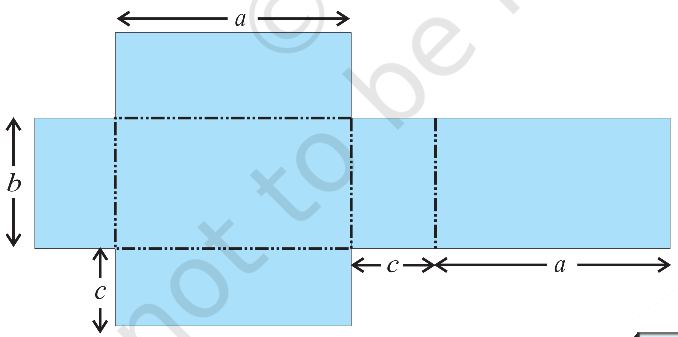
कार्ड बोर्ड, सेलोटेप, कटर, रूलर, स्कैच पेन/पेंसिल।

रचना की विधि

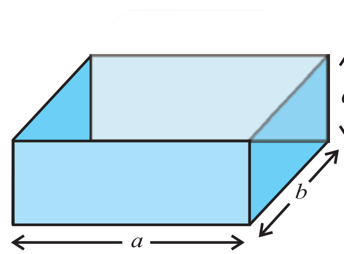
1. एक कार्ड बोर्ड पर विमाओं a इकाई $\times\, b$ इकाई वाले दो सर्वसम आयत, विमाओं b इकाई $\times\, c$ इकाई वाले दो सर्वसम आयत और विमाओं c इकाई $\times\, a$ इकाई वाले दो सर्वसम आयत बनाइए तथा उन्हें काट कर निकाल लीजिए।

2. इन 6 आयतों को आकृति 1 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए जिससे बनाए जाने वाले घनाभ का जाल प्राप्त हो जाता है।

3. आयतों को बिंदुकित चिह्नों के अनुदिश मोड़कर, सेलोटेप की सहायता से एक घनाभ बनाइए (देखिए आकृति 2)।



आकृति 1



आकृति 2

14/04/18

प्रदर्शन

विमाओं a इकाई $\times$ b इकाई वाले एक आयत का क्षेत्रफल $= ab$ वर्ग इकाई है।

विमाओं b इकाई $\times$ c इकाई वाले एक आयत का क्षेत्रफल $= bc$ वर्ग इकाई है।

विमाओं c इकाई $\times$ a इकाई वाले एक आयत का क्षेत्रफल $= ca$ वर्ग इकाई है।

इस प्रकार बने घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= (2 \times ab + 2 \times bc + 2 \times ca)$ वर्ग इकाई $= 2\,(ab + bc + ca)$ वर्ग इकाई है।

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

$a =$ ...., $b =$ ...., $c =$ ....,

अतः, $ab =$ ...., $bc =$ ...., $ca =$ ....,

$2ab =$ ...., $2bc =$ ...., $2ca =$ ....

सभी 6 आयतों के क्षेत्रफलों का योग = ...

अतः, घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\,(ab+bc+ca)$

अनुप्रयोग

इस परिणाम का प्रयोग घनाभाकार डिब्बों / अलमारियों, इत्यादि को बनाने के लिए आवश्यक सामग्री के आकलन करने में किया जा सकता है।

टिप्पणी

6 आयतों को पृथक-पृथक रूप से बनाने के स्थान पर (जैसा कि क्रियाकलाप में किया गया है), कार्ड बोर्ड पर सीधे ही घनाभ का जाल बनाया जा सकता है।

क्रियाकलाप 28

उद्देश्य

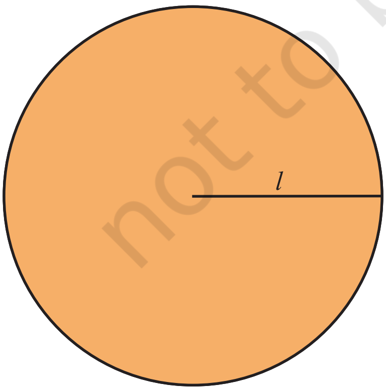
वृत्त के एक त्रिज्यखंड से एक शंकु बनाना तथा इसके वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल के लिए सूत्र ज्ञात करना।

आवश्यक सामग्री

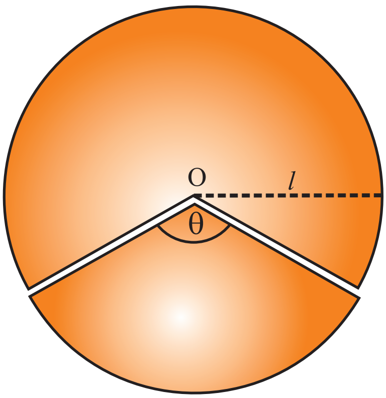
लकड़ी का हार्ड बोर्ड, एक्रिलिक शीट, सेलोटेप, चिकने काग़ज़, स्कैच पेन, सफ़ेद काग़ज़, कीलें, मार्कर।

रचना की विधि

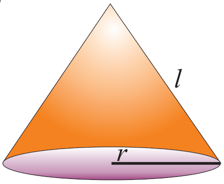
1. एक सुविधाजनक माप का लकड़ी का हार्ड बोर्ड लीजिए और उस पर एक सफ़ेद काग़ज़ चिपकाइए।
2. एक एक्रिलिक शीट में से त्रिज्या l का एक वृत्त काट लीजिए (देखिए आकृति 1)।
3. इस वृत्त में से कोण θ डिग्री वाला एक त्रिज्यखंड काट लीजिए (देखिए आकृति 2)।
4. इस त्रिज्यखंड की दोनों त्रिज्याओं को साथ में लाकर एक शंकु प्राप्त कीजिए। इस शंकु के दोनों सिरों (त्रिज्याओं) को सेलोटेप से जोड़िए और अब शंकु को हार्ड बोर्ड पर लगा दीजिए (देखिए आकृति 3)।



आकृति 1



आकृति 2



आकृति 3

प्रदर्शन

1. शंकु की तिर्यक ऊँचाई = वृत्त की त्रिज्या = l

2. शंकु के आधार की त्रिज्या = r

3. शंकु के आधार की परिधि = त्रिज्यखंड के चाप की लंबाई = $2\pi r$

4. शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$$= \frac{\text{चाप की लंबाई}}{\text{वृत की परिधि}} \times \text{वृत का क्षेत्रफल}$$

$$= \frac{2\pi r}{2\pi l} \times \pi l^2 = \pi r l$$

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

शंकु की तिर्यक ऊँचाई l = ______________________, r = ________________

अत:, चाप की लंबाई = ______________________,

त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = ________________, शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = ______

अत:, शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

यहाँ, क्षेत्रफल वर्ग इकाई में हैं।

अनुप्रयोग

यह परिणाम निम्नलिखित में उपयोगी रहता है–

1. एक शंक्वाकार तंबू बनाने के लिए आवश्यक कैनवास का आकलन।

2. जोकर की टोपी, आइसक्रीम कोन, इत्यादि बनाने के लिए आवश्यक सामग्री का आकलन।

क्रियाकलाप 29

उद्देश्य

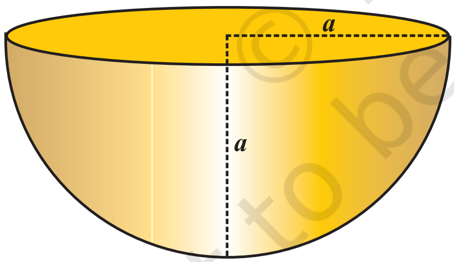
बराबर त्रिज्याओं और बराबर ऊँचाइयों वाले एक लंब वृत्तीय शंकु, एक अर्धगोले और एक लंब वृत्तीय बेलन के आयतनों में संबंध ज्ञात करना।

आवश्यक सामग्री

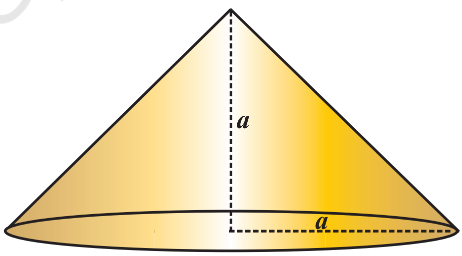
कार्ड बोर्ड, एक्रिलिक शीट, कटर, एक खोखली गेंद, गोंद, मार्कर, रेत या नमक।

रचना की विधि

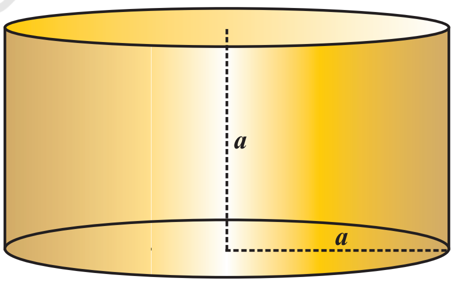
1. त्रिज्या, मान लीजिए a इकाई की एक खोखली गेंद लीजिए तथा इस गेंद को दो बराबर भागों में विभाजित कीजिए (देखिए आकृति 1)।
2. एक्रिलिक शीट का प्रयोग करते हुए, एक उपयुक्त त्रिज्या वाले वृत्त का त्रिज्यखंड काटकर त्रिज्या a और ऊँचाई a वाला एक शंकु बनाइए तथा उसे कार्ड बोर्ड पर लगाइए (देखिए आकृति 2)।
3. एक उपयुक्त माप की आयताकार शीट काटकर, त्रिज्या a और ऊँचाई a का एक बेलन बनाइए तथा इसे कार्ड बोर्ड पर चिपकाइए (देखिए आकृति 3)।



आकृति 1



आकृति 2



आकृति 3

प्रदर्शन

1. शंकु को रेत (या नमक) से भरिए तथा इसे अर्धगोले में दो बार डालिए। अर्धगोला रेत से पूरा भर जाता है।

   अत: शंकु का आयतन $= \frac{1}{2}$ अर्धगोले का आयतन

2. शंकु को रेत (या नमक) से भरिए और इसे बेलन में तीन बार डालिए। बेलन रेत से पूरा भर जाता है।

   अत: शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}$ बेलन का आयतन

3. शंकु का आयतन : अर्धगोले का आयतन : बेलन का आयतन = 1:2:3

प्रेक्षण

शंकु की त्रिज्या = शंकु की ऊँचाई = ____________

शंकु का आयतन $= \frac{1}{2}$ ________________ का आयतन

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}$ ________________ का आयतन

शंकु का आयतन : अर्धगोले का आयतन = __________ : ____________

शंकु का आयतन : बेलन का आयतन = __________ : ____________

शंकु का आयतन : अर्धगोले का आयतन : बेलन का आयतन = _____ : _____ : _____

अनुप्रयोग

1. यह संबंध बेलन के आयतन के सूत्र से शंकु के आयतन के लिए सूत्र और अर्धगोले/गोले के आयतन के लिए सूत्र प्राप्त करने में सहायक रहता है।
2. आयतनों के बीच में यह संबंध एक ही वस्तु को विभिन्न आकारों के बर्तनों जैसे शंकु, अर्धगोला, बेलन में पैक करने में प्रयोग किया जा सकता है।

क्रियाकलाप 30

उद्देश्य

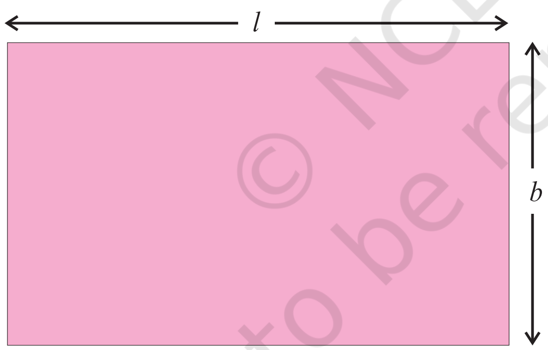
प्रायोगिक रूप से एक लंब वृत्तीय बेलन के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल के लिए सूत्र ज्ञात करना।

आवश्यक सामग्री

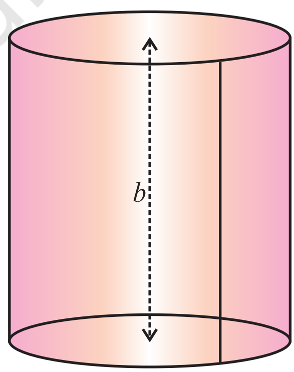
रंगीन चार्ट पेपर, सेलोटेप, रूलर

रचना की विधि

1. लंबाई l इकाई और चौड़ाई b इकाई वाला एक आयताकार चार्ट पेपर लीजिए (देखिए आकृति 1)।
2. इस पेपर को उसकी चौड़ाई के अनुदिश मोड़िए तथा दोनों सिरों को सेलोटेप से जोड़कर एक बेलन प्राप्त कीजिए जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।



आकृति 1



आकृति 2

प्रदर्शन

1. आयताकार पेपर की लंबाई $= l =$ बेलन के आधार की परिधि $= 2\pi r$, जहाँ r बेलन की त्रिज्या है।
2. आयताकार पेपर की चौड़ाई $= b =$ बेलन की ऊँचाई (h) है।

3. बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल

$= l \times b = 2\pi r \times h = 2\pi rh$ वर्ग इकाई

प्रेक्षण

वास्तविक मापन द्वारा–

$l =$ ...., $b =$ ....,

$l = 2\pi$ ...., $h = b =$ ....

आयताकार पेपर का क्षेत्रफल $= l \times b =$ ....

अत: बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

अनुप्रयोग

इस परिणाम का प्रयोग बेलनाकार बर्तनों, जैसे पाउडर के डिब्बे, ड्रम, तेल की टंकियाँ जो औद्योगिक इकाइयों में काम आती हैं, छत के ऊपर बनी पानी की टंकियाँ, इत्यादि के बनाने में लगने वाली आवश्यक वस्तुओं या सामग्री को ज्ञात करने में किया जाता है।

क्रियाकलाप 31

उद्देश्य

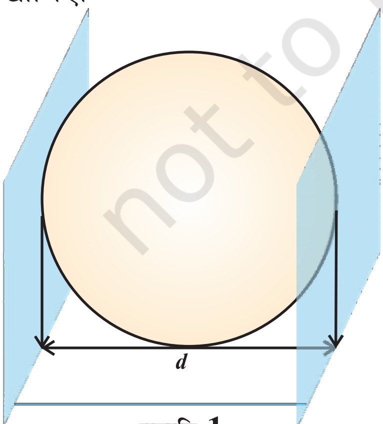
एक गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल के लिए सूत्र प्राप्त करना।

आवश्यक सामग्री

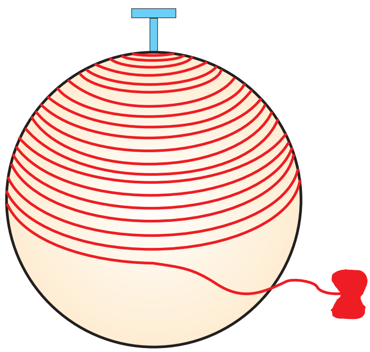
एक गेंद, कार्ड बोर्ड या लकड़ी की पट्टियाँ, काग़ज़ की मोटी शीट, रूलर, कटर, डोरी, नापने वाला टेप (फीता), गोंद, पिन।

रचना की विधि

1. एक गोलाकार गेंद लीजिए तथा इसे दो ऊर्ध्वाधर बोर्डों (या लकड़ी की पट्टियों) के बीच में रखकर इसका व्यास ज्ञात कीजिए (देखिए आकृति 1)। व्यास को d से व्यक्त कीजिए।
2. गेंद के सबसे ऊपरी भाग को अंकित कीजिए और वहाँ एक पिन लगाइए (देखिए आकृति 2)।
3. पिन का सहारा लेते हुए, गेंद पर (सर्पिल के रूप में) पूर्णतया डोरी लपेटिए ताकि गेंद पर कोई रिक्त स्थान न रहे (देखिए आकृति 2)।
4. डोरी पर प्रारंभिक और अंतिम बिंदुओं को चिह्नित कीजिए तथा इन दोनों चिह्नों के बीच की दूरी मापिए और इसे l से व्यक्त कीजिए। धीरे-धीरे डोरी को गेंद की पृष्ठ से हटा लीजिए।
5. काग़ज़ की एक मोटी शीट पर त्रिज्या r (अर्थात् गेंद की त्रिज्या के बराबर) वाले चार वृत्त खींचिए।

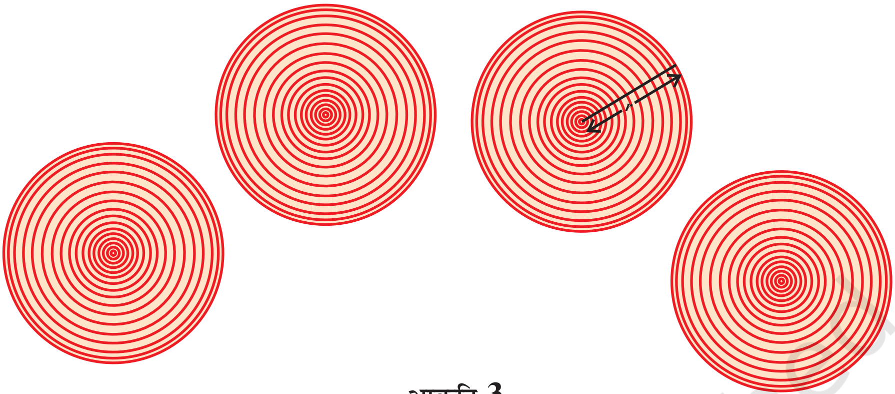


आकृति 1



आकृति 2

6. इन वृत्तों (देखिए आकृति 3) को उस डोरी से भरना प्रारंभ कीजिए जो आपने गेंद पर लपेटी थी।



आकृति 3

प्रदर्शन

मान लीजिए कि (त्रिज्या r वाले) एक वृत्त को ढकने वाली डोरी की लंबाई को a से व्यक्त करते हैं।

वह डोरी जो गेंद को पूर्णतया एक बार ढक लेती है, वही डोरी चार वृत्तों (गेंद की त्रिज्या के बराबर त्रिज्या वाले) को पूर्णतया ढक लेने में प्रयुक्त हो जाती है।

इससे सुझाव मिलता है–

त्रिज्या r वाले गोले के पृष्ठ को ढकने वाली डोरी की लंबाई = $4 \times$ त्रिज्या r वाले एक वृत को ढकने में लगी डोरी की लंबाई, अर्थात् $l = 4 \times a$ है।

या, गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4 \times$ त्रिज्या r वाले वृत्त का क्षेत्रफल

अतः, गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

प्रेक्षण

गोलाकार गेंद का व्यास d =............... इकाई

त्रिज्या r =............... इकाई

गेंद को ढकने के लिए प्रयुक्त डोरी की लंबाई l = ... इकाई

एक वृत्त को ढकने के लिए प्रयुक्त डोरी की लंबाई a =.............. इकाई

अत:, $l = 4 \times$ _____ है।

त्रिज्या r वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4 \times$ त्रिज्या ___ वाले वृत्त का क्षेत्रफल = $4\pi r^2$ है।

अनुप्रयोग

यह परिणाम गोलाकार और अर्धगोलाकार वस्तुओं पर पेंटिंग करने, उनकी मरम्मत कराने और उनको बनाने में लगने वाली लागत ज्ञात करने में प्रयोग किया जा सकता है।

सावधानियाँ

- गेंद का व्यास ध्यानपूर्वक मापिए।
- गेंद पर डोरी पूर्णतया ऐसे लपेटिए ताकि उस पर कोई स्थान रिक्त न रहे।
- डोरी जितनी पतली होगी, उतनी ही परिणाम में शुद्धता होगी।

क्रियाकलाप 32

उद्देश्य

समान चौड़ाइयों और असमान चौड़ाइयों के वर्गों के लिए आयतचित्र खींचना।

आवश्यक सामग्री

आलेख काग़ज़, ज्यामिति बॉक्स, स्कैच पेन, कैंची, गोंद, कार्ड बोर्ड।

रचना की विधि

1. दैनिक जीवन से आँकड़े, जैसे कि कक्षा के विद्यार्थियों के भार, एकत्रित कीजिए तथा इनकी बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

स्थिति I – समान चौड़ाइयों वाले वर्ग अंतरालों के लिए

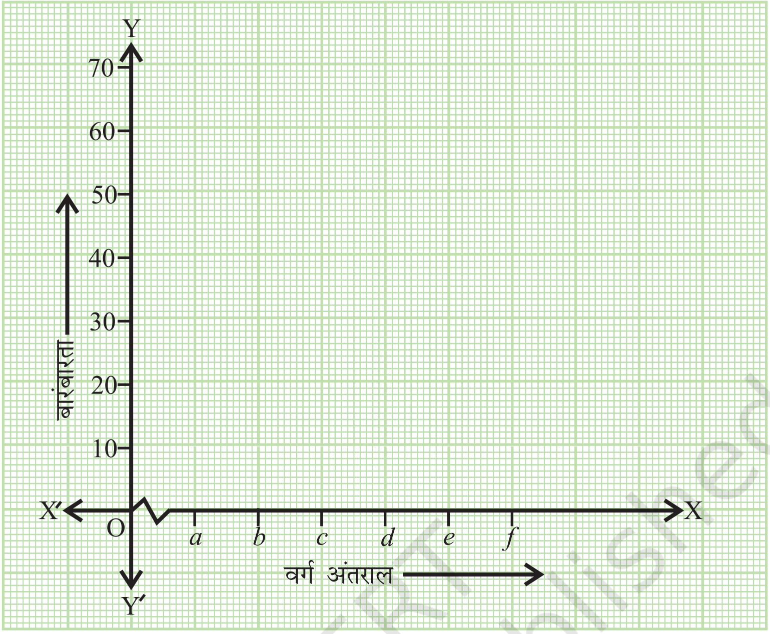
वर्ग अंतराल	$a-b$	$b-c$	$c-d$	$d-e$	$e-f$
बारंबारता	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5

यहाँ , $d-f = 2\,(a-b)$

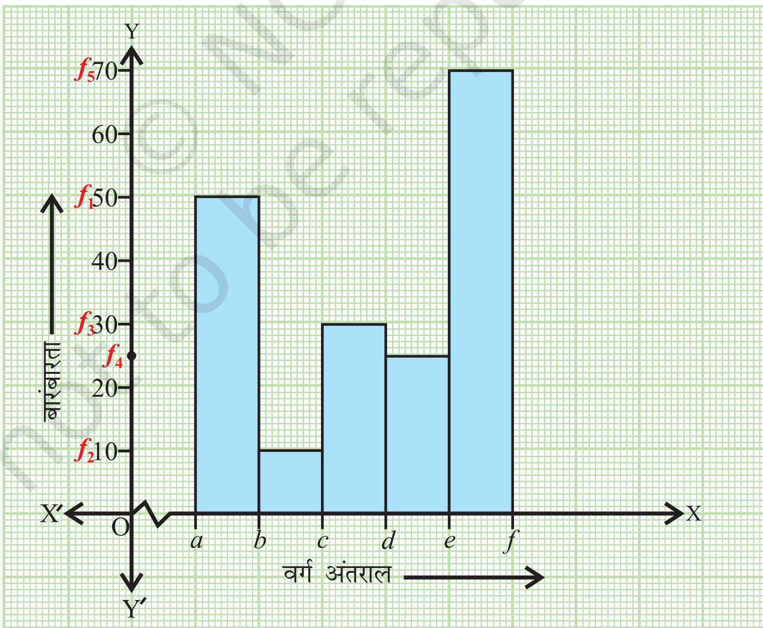
स्थिति II – असमान चौड़ाइयों वाले वर्गों के लिए

वर्ग अंतराल	$\boldsymbol{a-b}$ (चौड़ाई $\boldsymbol{x}$)	$\boldsymbol{b-c}$ (चौड़ाई $\boldsymbol{x}$)	$\boldsymbol{c-d}$ (चौड़ाई $\boldsymbol{x}$)	$\boldsymbol{d-f}$ (चौड़ाई $\mathbf{2}\boldsymbol{x}$)
बारंबारता	f_1	f_2	f_3	f_4
संशोधित बारंबारता	f_1	f_2	f_3	$F' = \frac{f_4}{2}$

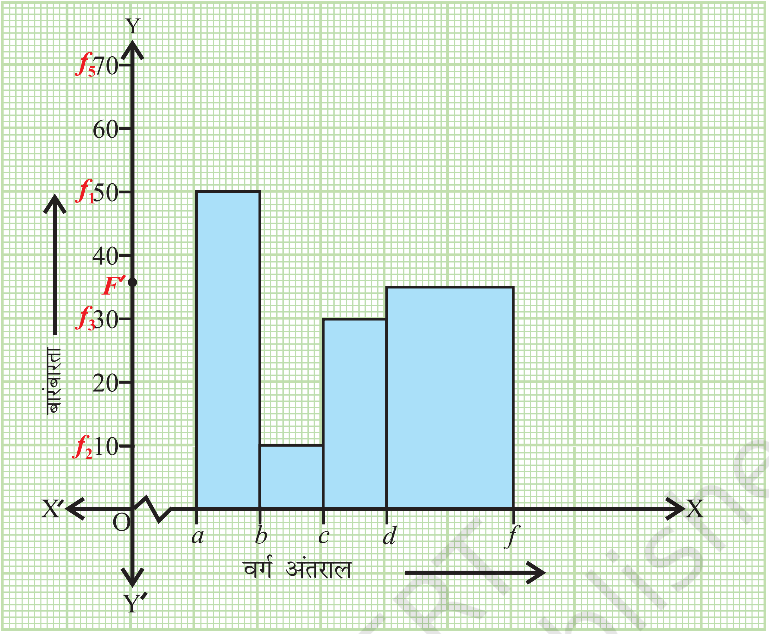
2. एक आलेख काग़ज़ (20 cm × 20 cm) लीजिए और इसे एक कार्ड बोर्ड पर चिपकाइए।
3. आलेख काग़ज़ पर दो लांबिक अक्ष X′OX और YOY′ खींचिए।
4. x-अक्ष पर वर्ग अंतराल और y-अक्ष पर समान दूरियों पर बारंबारताएँ अंकित कीजिए, जैसा कि आकृति 1 में दर्शाया गया है।


Y
70
60
50
40
30
20
10
बारंबारता
X'
O
X
a
b
c
d
e
f
वर्ग अंतराल
Y'

आकृति 1


Y
f_5 70
60
f_1 50
40
f_3 30
f_4
20
f_2 10
बारंबारता
X'
O
X
a
b
c
d
e
f
वर्ग अंतराल
Y'

आकृति 2



आकृति 3

5. अंतरालों $(a-b)$, $(b-c)$, $(c-d)$, $(d-e)$, $(e-f)$ पर समान चौड़ाई के तथा क्रमशः f_1, f_2, f_3, f_4 और f_5 ऊँचाइयों वाले आयत खींचिए जैसा कि आकृति 2 में दर्शाया गया है।

6. अंतरालों $(a-b)$, $(b-c)$, $(c-d)$, $(d-f)$ पर क्रमशः f_1, f_2, f_3 और F' ऊँचाइयों वाले आयत खींचिए, जैसा कि आकृति 3 में दर्शाया गया है।

प्रदर्शन

1. a, b, c, d, e और f के लिए विभिन्न संख्यात्मक मान लिए जा सकते हैं।

2. इन संख्यात्मक मानों के साथ, समान चौड़ाइयों और असमान चौड़ाइयों वाले आयतचित्र खींचे जा सकते हैं।

प्रेक्षण

स्थिति I

1.अंतराल है–

$a-b=$ ______, $b-c=$ ______, $c-d=$ ______,

$d-e=$ ______, $e-f=$ ______

2. $f_1=$ ______, $f_2=$ ______, $f_3=$ ______,

$f_4=$ ______, $f_5=$ ______

स्थिति II

1. $a-b=$ ______, $b-c=$ ______, $c-d=$ ______,

$d-f=$ ______,

2. $f_1=$ ______, $f_2=$ ______, $f_3=$ ______, $f_4=$ ______,

$F' = \dfrac{f_4}{2} =$ ______

अनुप्रयोग

आयतचित्रों का बड़े आँकड़ों को संक्षिप्त विधि से चित्रीय रूप से प्रस्तुत करने में प्रयोग किया जाता है।

क्रियाकलाप 33

उद्देश्य

किसी पृष्ठ पर लिखित टेलीफोन नंबरों में इकाई के अंकों की प्रायोगिक प्रायिकता ज्ञात करना, जब कि यह पृष्ठ टेलीफोन डॉयरेक्ट्री से यादृच्छिक रूप से चुना गया है।

आवश्यक सामग्री

टेलीफोन डॉयरेक्ट्री, नोट बुक, पेन, रूलर।

रचना की विधि

1. एक टेलीफोन डायरेक्ट्री लीजिए और उसमें से यादृच्छिक रूप से एक पृष्ठ चुनिए।
2. इस चुने हुए पृष्ठ पर टेलीफोन नंबरों की कुल संख्या गिनिए। मान लीजिए कि यह N है।
3. एक टेलीफोन नंबर के इकाई के स्थान पर 0, 1, ..., 9 में से कोई भी अंक हो सकता है।
4. मिलान चिह्नों का प्रयोग करते हुए, इकाई स्थान पर आने वाले अंकों की एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।
5. इस सारणी से, 0, 1, 2, ...8, 9 अंकों में से प्रत्येक की बारंबारता लिखिए।
6. प्रायोगिक प्रायिकता का प्रयोग करते हुए, प्रत्येक अंक की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

प्रदर्शन

1. 0, 1, ..., 8, 9 अंकों के लिए (मिलान चिन्हों का प्रयोग करते हुए) एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए जैसी कि नीचे दर्शाई गई है–

अंक	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
मिलान चिह्न										
बारंबारता	n_0	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9

14/04/18

2. सारणी के प्रत्येक अंक (0, 1, 2, 3,...,9) की बारंबारता लिखिए। अंक 0, 1, 2, 3, ..., 9 क्रमशः $n_0, n_1, n_2, n_3, ..., n_9$ बार आ रहे हैं।

3. प्रत्येक अंक को एक घटना E मानते हुए, उसकी प्रायिकता, सूत्र

$$P(E) = \frac{\text{उन अभिप्रयोगों की संख्या जिनमें यह घटना घटित हुई है}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

का प्रयोग करते हुए परिकलित कीजिए।

4. अतः, 0, 1, 2, ..., 9 के घटित होने की प्रायोगिक प्रायिकताएँ क्रमशः

$$P(0)=\frac{n_0}{N},\ P(1)=\frac{n_1}{N},\ P(2)=\frac{n_2}{N},...,\ P(9)=\frac{n_9}{N}$$ हैं।

प्रेक्षण

एक पृष्ठ पर टेलीफोन नंबरों की कुल संख्या (N) = ...

इकाई के स्थान पर 0 आने की संख्या (n_0) = ...

इकाई के स्थान पर 1 आने की संख्या (n_1) = ...

इकाई के स्थान पर 2 आने की संख्या (n_2) = ...

इकाई के स्थान पर 3 आने की संख्या (n_3) =........................ .

इकाई के स्थान पर 4 आने की संख्या (n_4) = ...

....

इकाई के स्थान पर 9 आने की संख्या (n_9) = ...

अतः, 0 आने की प्रायोगिक प्रायिकता $=P(0)=\frac{n_0}{N}=$ ....,

1 आने की प्रायोगिक प्रायिकता $=P(1)=\frac{n_1}{N}=$ ...., $P(2)=\frac{n_2}{N}=$ ....

$P(9)=\frac{n_9}{N}=$ ....

14/04/18

अनुप्रयोग

प्रायोगिक प्रायिकता का उपयोग बीमा कंपनियों द्वारा प्रीमियम तालिकाएँ निर्धारित करने में, मौसम विभाग द्वारा मौसम संबंधी भविष्यवाणी करने, स्टॉक मार्किट में कंपनियों के प्रदर्शन की भविष्यवाणी करने इत्यादि में किया जाता है।

The mathematics experience of the students is incomplete if he never had the opportunity to solve a problem invented by himself.

– G. Polya

क्रियाकलाप 34

उद्देश्य

एक पासे को बहुत अधिक बार फेंकने पर उसके प्रत्येक परिणाम की प्रायोगिक प्रायिकता ज्ञात करना।

आवश्यक सामग्री

पासा, नोटबुक, पेन

रचना की विधि

1. संपूर्ण कक्षा को उपयुक्त साइज़ के दस समूहों, मान लीजिए, $G_1, G_2, G_3, ..., G_{10}$ में विभाजित कीजिए।
2. प्रत्येक समूह को 100 बार एक पासे को फेंकने दीजिए तथा उनसे कहिए कि वे अपने प्रेक्षण, अर्थात् परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 या 6 कितनी बार आए अपनी नोटबुक पर लिख लें।
3. सभी समूहों में गिनिए कि परिणाम 1 कितनी बार आया है। इसे a से व्यक्त कीजिए। इसी प्रकार, गिनिए कि परिणाम 2, 3, 4, 5 और 6 कितनी बार आए हैं।

   इन्हें क्रमशः b, c, d, e और f से व्यक्त कीजिए।
4. प्रत्येक परिणाम E की प्रायिकता सूत्र

$$P(E) = \frac{\text{परिणाम E के आने की संख्या}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

का प्रयोग करके ज्ञात कीजिए।

प्रदर्शन

1. यहाँ 10 समूह हैं तथा प्रत्येक समूह पासे को 100 बार फेंकता है। अतः अभिप्रयोगों की कुल संख्या 1000 है।
2. इनमें 1 जितनी बार आया है वह संख्या a है।

   अतः, 1 की प्रायोगिक प्रायिकता $P(1) = \frac{a}{1000}$ है।

इसी प्रकार, 2 की प्रायोगिक प्रायिकता $P(2) = \frac{b}{1000}$ है, 3 की प्रायोगिक प्रायिकता $P(3) = \frac{c}{1000}$ है, 4 की प्रायोगिक प्रायिकता $P(4) = \frac{d}{1000}$ है, 5 की प्रायोगिक प्रायिकता $P(5) = \frac{e}{1000}$ है तथा 6 की प्रायोगिक प्रायिकता $P(6) = \frac{f}{1000}$ है।

प्रेक्षण

अपने प्रयोग के परिणामों को निम्नलिखित सारणी में भरिए–

परिणाम/ समूह	पासे पर एक संख्या कितनी बार आती है						योग
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
G_1	----	----	----	----	----	----	100
G_2	----	----	----	----	----	----	100
G_3	----	----	----	----	----	----	100
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
G_{10}	----	----	----	----	----	----	100
योग	***a* = ----**	***b* = ----**	***c* = ----**	***d* = ----**	***e* = ----**	***f* = ----**	**1000**

अतः, $P(1) = \frac{\cdots\cdots}{1000}$, $P(2) = \frac{\cdots\cdots}{1000}$, $P(3) = \frac{\cdots\cdots}{1000}$, $P(4) = \frac{\cdots\cdots}{1000}$,

$P(5) = \frac{\cdots\cdots}{1000}$, $P(6) = \frac{\cdots\cdots}{1000}$

अनुप्रयोग

प्रायिकता का प्रयोग अनेक साँख्यिकीय संस्थानों द्वारा उपलब्ध आँकड़ों के आधार पर नई कार्यवाही के आकलन या उसकी प्रागुप्ती करने में किया जाता है।