















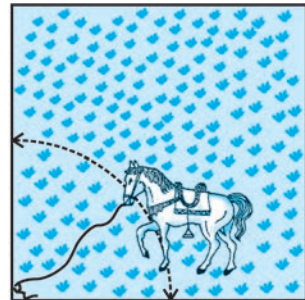
$$\begin{aligned} \text{अतः } \Delta OAB \text{ का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} AB \times OM = \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2} \text{ cm}^2 \\ &= \frac{441}{4} \sqrt{3} \text{ cm}^2 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{इसलिए वृत्तखंड AYB का क्षेत्रफल} &= \left( 462 - \frac{441}{4} \sqrt{3} \right) \text{ cm}^2 \quad [(1), (2) \text{ और } (3) \text{ से}] \\ &= \frac{21}{4} (88 - 21\sqrt{3}) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

### अभ्यास 12.2

(जब तक अन्यथा न कहा जाए)

- 6 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त में एक 60° का कोण अंतरित करती है, जिसका कोण 60° है।
- एक वृत्त के चतुर्थांश में एक 22 cm परिधि का चाप अंतरित करता है।
- एक घड़ी की मिनट की सुई 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- 10 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त में एक 60° का कोण अंतरित करती है। निम्नलिखित के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
  - संगत लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- त्रिज्या 21 cm वाले एक वृत्त में एक 60° का कोण अंतरित करता है। ज्ञात कीजिए:
  - चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए।
  - संगत लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
  - संगत जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।
- 15 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त को कोई जीवा केंद्र पर 60° का कोण अंतरित करती है। संगत लघु वृत्तखंडों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ( $\pi = 3.14$  और  $\sqrt{3} = 1.73$  का प्रयोग कीजिए।)
- त्रिज्या 12 cm वाले एक वृत्त को कोई जीवा केंद्र पर 120° का कोण अंतरित करती है। संगत वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ( $\pi = 3.14$  और  $\sqrt{3} = 1.73$  का प्रयोग कीजिए।)
- 15 m भुजा वाले एक वर्गाकार घास के मैदान के एक कोने पर लगे खूँटे से एक घोड़े को 5 m लंबी रस्सी से बाँध दिया गया है (देखिए आकृति 12.11)। ज्ञात कीजिए:

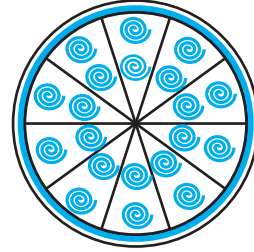


आकृति 12.11



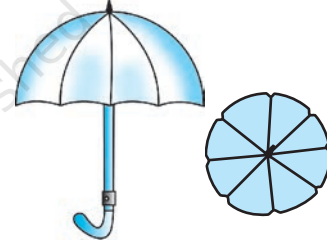
- (i) मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल जहाँ घोड़ा घास चर सकता है।  
 (ii) चरे जा सकने वाले क्षेत्रफल में वृद्धि, यदि घोड़े को 5 m लंबी रस्सी के स्थान पर 10 m लंबी रस्सी से बाँध दिया जाए। ( $\pi = 3.14$  का प्रयोग कीजिए।)

9. एक वृत्ताकार ब्रूच (brooch) को चाँदी के तार से बनाया जाना है जिसका व्यास 35 mm है। तार को वृत्त के 5 व्यासों को बनाने में भी प्रयुक्त किया गया है जो उसे 10 बराबर त्रिज्यखंडों में विभाजित करता है जैसा कि आकृति 12.12 में दर्शाया गया है। तो ज्ञात कीजिए:



आकृति 12.12

- (i) कुल वांछित चाँदी के तार की लंबाई  
 (ii) ब्रूच के प्रत्येक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल
10. एक छतरी में आठ ताने हैं, जो बराबर दूरी पर लगे हुए हैं (देखिए आकृति 12.13)। छतरी को 45 cm त्रिज्या वाला एक सपाट वृत्त मानते हुए, इसकी दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

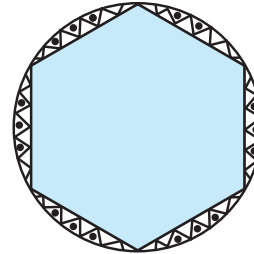


आकृति 12.13

11. किसी कार के दो वाइपर (Wipers) हैं, परस्पर कभी आच्छादित नहीं होते हैं। प्रत्येक वाइपर की पत्ती की लंबाई 25 cm है और  $115^\circ$  के कोण तक घूम कर सफाई कर सकता है। पत्तियों की प्रत्येक बुहार के साथ जितना क्षेत्रफल साफ हो जाता है, वह ज्ञात कीजिए।

12. जहाजों को समुद्र में जलस्तर के नीचे स्थित चट्टानों की चेतावनी देने के लिए, एक लाइट हाउस (light house)  $80^\circ$  कोण वाले एक त्रिज्यखंड में 16.5 km की दूरी तक लाल रंग का प्रकाश फैलाता है। समुद्र के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें जहाजों को चेतावनी दी जा सके। ( $\pi = 3.14$  का प्रयोग कीजिए।)

13. एक गोल मेज़पोश पर छः समान डिज़ाइन बने हुए हैं जैसाकि आकृति 12.14 में दर्शाया गया है। यदि मेज़पोश की त्रिज्या 28 cm है, तो ₹ 0.35 प्रति वर्ग सेंटीमीटर की दर से इन डिज़ाइनों को बनाने की लागत ज्ञात कीजिए। ( $\sqrt{3} = 1.7$  का प्रयोग कीजिए)



आकृति 12.14

14. निम्नलिखित में सही उत्तर चुनिए:

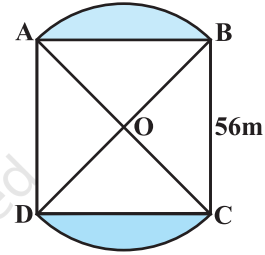
त्रिज्या R वाले वृत्त के उस त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल जिसका कोण  $p^\circ$  है, निम्नलिखित है:

- (A)  $\frac{p}{180} \times 2\pi R$       (B)  $\frac{p}{180} \times \pi R^2$       (C)  $\frac{p}{360} \times 2\pi R$       (D)  $\frac{p}{720} \times 2\pi R^2$

## 12.4 समतल आकृतियों के संयोजनों के क्षेत्रफल

अभी तक हमने विभिन्न आकृतियों के क्षेत्रफल पृथक-पृथक रूप से ज्ञात किए हैं। आइए अब समतल आकृतियों के कुछ संयोजनों (combinations) के क्षेत्रफल ज्ञात करने का प्रयत्न करें। हमें इस प्रकार की आकृतियाँ दैनिक जीवन में तथा विभिन्न रोचक डिज़ाइनों के रूप में देखने को मिलती हैं। फूलों की क्यारियाँ, नालियों के ढक्कन, खिड़कियों के डिज़ाइन, मेज़ पोशों पर बने डिज़ाइन आदि ऐसी आकृतियों के कुछ उदाहरण हैं। इन आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात करने की प्रक्रिया को हम कुछ उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करेंगे।

**उदाहरण 4 :** आकृति 12.15 में, 56 m भुजा वाले एक वर्गाकार लॉन (lawn) ABCD के दो ओर बनी हुई दो वृत्ताकार फूलों की क्यारियाँ दर्शाई गई हैं। यदि प्रत्येक वृत्ताकार क्यारी का केंद्र लॉन के विकर्णों का प्रतिच्छेद बिंदु O है, तो वर्गाकार लॉन तथा फूलों की क्यारियों के क्षेत्रफलों का योग ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.15

( $\pi = \frac{22}{7}$  का प्रयोग कीजिए।)

**हल :** वर्गाकार लॉन ABCD का क्षेत्रफल =  $56 \times 56 \text{ m}^2$  (1)

मान लीजिए  $OA = OB = x$  मीटर है।

अतः  $x^2 + x^2 = 56^2$

या  $2x^2 = 56 \times 56$

या  $x^2 = 28 \times 56$  (2)

अब त्रिज्यखंड OAB का क्षेत्रफल =  $\frac{90}{360} \times \pi x^2 = \frac{1}{4} \times \pi x^2$   
 $= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 \text{ m}^2$  [(2) से] (3)

साथ ही  $\Delta OAB$  का क्षेत्रफल =  $\frac{1}{4} \times 56 \times 56 \text{ m}^2$  ( $\angle AOB = 90^\circ$ ) (4)

इसलिए क्यारी AB का क्षेत्रफल =  $\left( \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 - \frac{1}{4} \times 56 \times 56 \right) \text{ m}^2$   
 [(3) और (4) से]

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \left( \frac{22}{7} - 2 \right) \text{m}^2 \\
 &= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7} \text{m}^2 \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$\text{इसी प्रकार, दूसरी क्यारी का क्षेत्रफल} = \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7} \text{m}^2 \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 \text{अतः} \quad \text{संपूर्ण क्षेत्रफल} &= \left( 56 \times 56 + \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7} \right) \text{m}^2 \quad [(1), (5) \text{ और } (6) \text{ से}] \\
 &= 28 \times 56 \left( 2 + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \right) \text{m}^2 \\
 &= 28 \times 56 \times \frac{18}{7} \text{m}^2 = 4032 \text{m}^2
 \end{aligned}$$

**वैकल्पिक हल :**

संपूर्ण क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड OAB का क्षेत्रफल + त्रिज्यखंड ODC का क्षेत्रफल  
+  $\Delta$  OAD का क्षेत्रफल +  $\Delta$  OBC का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}
 &= \left( \frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 + \frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} \times 56 \times 56 + \frac{1}{4} \times 56 \times 56 \right) \text{m}^2 \\
 &= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \left( \frac{22}{7} + \frac{22}{7} + 2 + 2 \right) \text{m}^2 \\
 &= \frac{7 \times 56}{4} (22 + 22 + 14 + 14) \text{m}^2 \\
 &= 56 \times 72 \text{m}^2 = 4032 \text{m}^2
 \end{aligned}$$

**उदाहरण 5 :** आकृति 12.16 में छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ ABCD भुजा 14 cm का एक वर्ग है।

**हल :** वर्ग ABCD का क्षेत्रफल =  $14 \times 14 \text{ cm}^2 = 196 \text{ cm}^2$

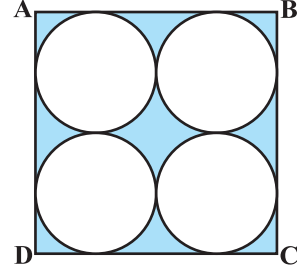
$$\text{प्रत्येक वृत्त का व्यास} = \frac{14}{2} \text{ cm} = 7 \text{ cm}$$

इसलिए प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या =  $\frac{7}{2} \text{ cm}$

$$\begin{aligned} \text{अतः एक वृत्त का क्षेत्रफल} &= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \text{ cm}^2 \\ &= \frac{154}{4} \text{ cm}^2 = \frac{77}{2} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

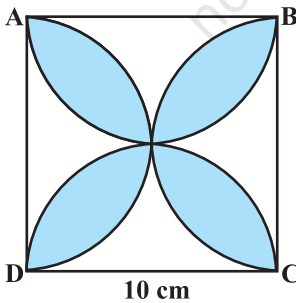
इसलिए चारों वृत्तों का क्षेत्रफल =  $4 \times \frac{77}{2} \text{ cm}^2 = 154 \text{ cm}^2$

अतः छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल =  $(196 - 154) \text{ cm}^2 = 42 \text{ cm}^2$

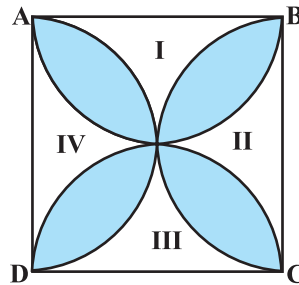


आकृति 12.16

**उदाहरण 6 :** आकृति 12.17 में, छायांकित डिजाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ ABCD भुजा 10 cm का एक वर्ग है तथा इस वर्ग की प्रत्येक भुजा को व्यास मान कर अर्धवृत्त खींचे गए हैं। ( $\pi = 3.14$  का प्रयोग कीजिए।)



आकृति 12.17



आकृति 12.18

**हल :** आइए चार अछायांकित क्षेत्रों को I, II, III और IV से अंकित करें (देखिए आकृति 12.18)।

I का क्षेत्रफल + III का क्षेत्रफल

= ABCD का क्षेत्रफल - दोनों अर्धवृत्तों का क्षेत्रफल, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 5 cm है।

$$= \left( 10 \times 10 - 2 \times \frac{1}{2} \times \pi \times 5^2 \right) \text{cm}^2 = (100 - 3.14 \times 25) \text{cm}^2$$

$$= (100 - 78.5) \text{cm}^2 = 21.5 \text{cm}^2$$

इसी प्रकार, II का क्षेत्रफल + IV का क्षेत्रफल = 21.5 cm<sup>2</sup>

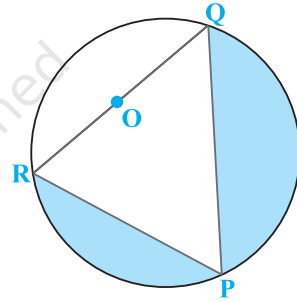
अतः छायांकित डिजाइन का क्षेत्रफल = ABCD का क्षेत्रफल - (I + II + III + IV) का क्षेत्रफल

$$= (100 - 2 \times 21.5) \text{cm}^2 = (100 - 43) \text{cm}^2 = 57 \text{cm}^2$$

### प्रश्नावली 12.3

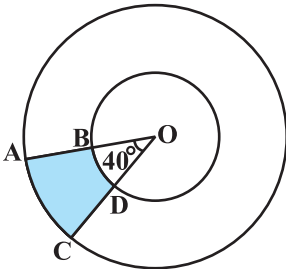
(जब तक अन्यथा न कहा जाए,  $\pi = \frac{22}{7}$  का प्रयोग कीजिए।)

1. आकृति 12.19 में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि  $PQ = 24$  cm,  $PR = 7$  cm तथा O वृत्त का केंद्र है।

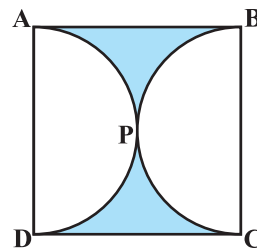


आकृति 12.19

2. आकृति 12.20 में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि केंद्र O वाले दोनों सकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 7 cm और 14 cm हैं तथा  $\angle AOC = 40^\circ$  है।



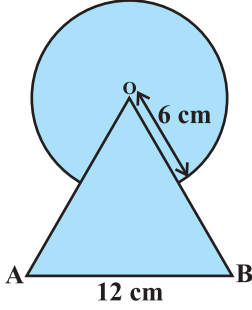
आकृति 12.20



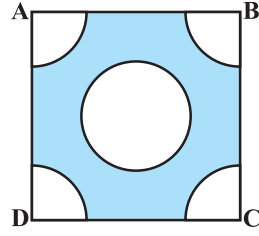
आकृति 12.21

3. आकृति 12.21 में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि ABCD भुजा 14 cm का एक वर्ग है तथा APD और BPC दो अर्धवृत्त हैं।

4. आकृति 12.22 में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ भुजा 12 cm वाले एक समबाहु त्रिभुज OAB के शीर्ष O को केंद्र मान कर 6 सेमी त्रिज्या वाला एक वृत्तीय चाप खींचा गया है।

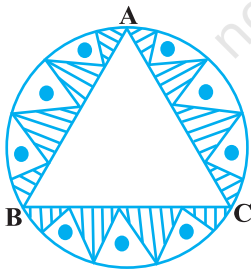


आकृति 12.22

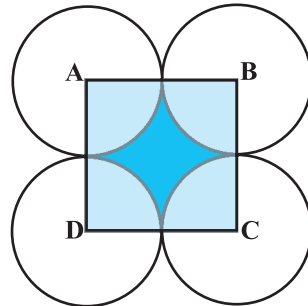


आकृति 12.23

5. भुजा 4 cm वाले एक वर्ग के प्रत्येक कोने से 1 cm त्रिज्या वाले वृत्त का एक चतुर्थांश काटा गया है तथा बीच में 2 cm व्यास का एक वृत्त भी काटा गया है, जैसाकि आकृति 12.23 में दर्शाया गया है। वर्ग के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. एक वृत्ताकार मेज़पोश, जिसकी त्रिज्या 32 cm है, में बीच में एक समबाहु त्रिभुज ABC छोड़ते हुए एक डिज़ाइन बना हुआ है, जैसाकि आकृति 12.24 में दिखाया गया है। इस डिज़ाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



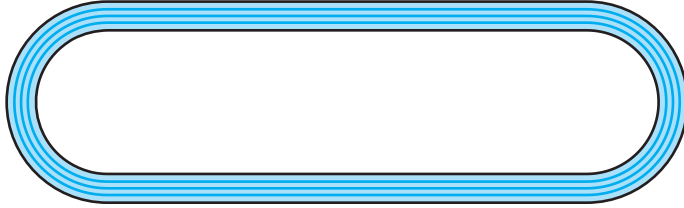
आकृति 12.24



आकृति 12.25

7. आकृति 12.25 में, ABCD भुजा 14 cm वाला एक वर्ग है। A, B, C और D को केंद्र मानकर, चार वृत्त इस प्रकार खींचे गए हैं कि प्रत्येक वृत्त तीन शेष वृत्तों में से दो वृत्तों को बाह्य रूप से स्पर्श करता है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. आकृति 12.26 एक दौड़ने का पथ (racing track) दर्शाती है, जिसके बाएँ और दाएँ सिरे अर्धवृत्ताकार हैं।

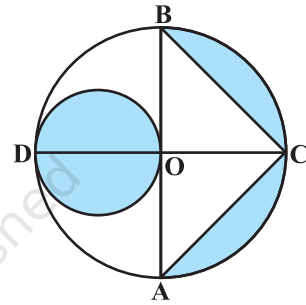


आकृति 12.26

दोनों आंतरिक समांतर रेखाखंडों के बीच की दूरी 60 m है तथा इनमें से प्रत्येक रेखाखंड 106 m लंबा है। यदि यह पथ 10 m चौड़ा है, तो ज्ञात कीजिए।

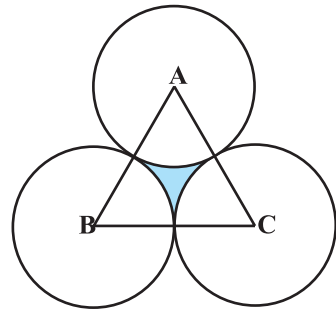
- (i) पथ के आंतरिक किनारों के अनुदिश एक पूरा चक्कर लगाने में चली गई दूरी  
(ii) पथ का क्षेत्रफल

9. आकृति 12.27 में, AB और CD केंद्र O वाले एक वृत्त के दो परस्पर लंब व्यास हैं तथा OD छोटे वृत्त का व्यास है। यदि  $OA = 7$  cm है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



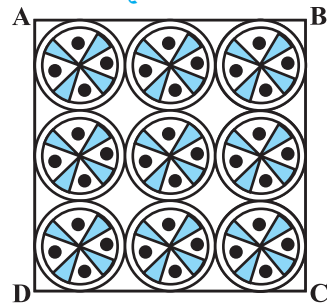
आकृति 12.27

10. एक समबाहु त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल  $17320.5 \text{ cm}^2$  है। इस त्रिभुज के प्रत्येक शीर्ष को केंद्र मानकर त्रिभुज की भुजा के आधे के बराबर की त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा जाता है (देखिए आकृति 12.28)। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ( $\pi = 3.14$  और  $\sqrt{3} = 1.73205$  लीजिए।)



आकृति 12.28

11. एक वर्गाकार रूमाल पर, नौ वृत्ताकार डिज़ाइन बने हैं, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 7 cm है (देखिए आकृति 12.29)। रूमाल के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

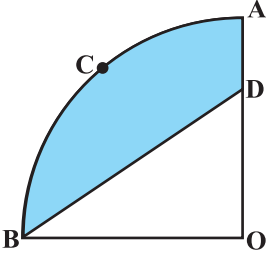


आकृति 12.29

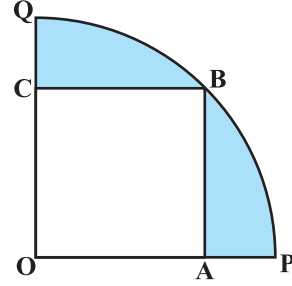
12. आकृति 12.30 में, OACB केंद्र O और त्रिज्या 3.5 cm वाले एक वृत्त का चतुर्थांश है। यदि  $OD = 2$  cm है, तो निम्नलिखित के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए:

(i) चतुर्थांश OACB

(ii) छायांकित भाग।

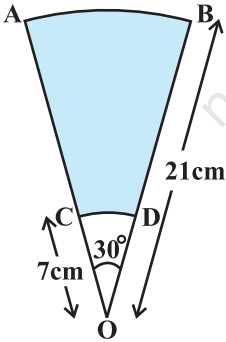


आकृति 12.30

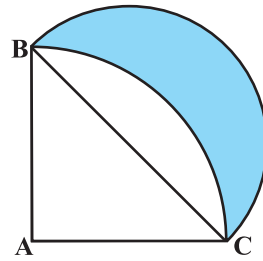


आकृति 12.31

13. आकृति 12.31 में, एक चतुर्थांश OPBQ के अंतर्गत एक वर्ग OABC बना हुआ है। यदि  $OA = 20$  cm है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ( $\pi = 3.14$  लीजिए।)
14. AB और CD केंद्र O तथा त्रिज्याओं 21 cm और 7 cm वाले दो संकेंद्रीय वृत्तों के क्रमशः दो चाप हैं (देखिए आकृति 12.32)। यदि  $\angle AOB = 30^\circ$  है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.32

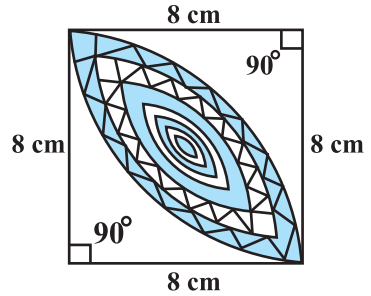


आकृति 12.33

15. आकृति 12.33 में, ABC त्रिज्या 14 cm वाले एक वृत्त का चतुर्थांश है तथा BC को व्यास मान कर एक अर्धवृत्त खींचा गया है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



16. आकृति 12.34 में, छायांकित डिज़ाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जो 8 cm त्रिज्याओं वाले दो वृत्तों के चतुर्थांशों के बीच उभयनिष्ठ है।



आकृति 12.34

### 12.5 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. त्रिज्या  $r$  वाले वृत्त की परिधि  $= 2\pi r$
2. त्रिज्या  $r$  वाले वृत्त का क्षेत्रफल  $= \pi r^2$
3. त्रिज्या  $r$  वाले वृत्त के एक त्रिज्यखंड, जिसका कोण अंशों में  $\theta$  है, के संगत चाप की लंबाई  $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$  होती है।
4. त्रिज्या  $r$  वाले वृत्त के एक त्रिज्यखंड, जिसका कोण अंशों में  $\theta$  है, का क्षेत्रफल  $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$  होता है।
5. एक वृत्तखंड का क्षेत्रफल = संगत त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल - संगत त्रिभुज का क्षेत्रफल